Vollständigkeit und Korrektheit von PL1

1. Vollständigkeit und Korrektheit von PL1

- Ein Satz S einer Sprache der PL1 folgt aus einer Menge Γ von solchen Sätzen (kurz: $\Gamma \models \mathsf{S}$) genau dann, wenn jede Interpretation $\mathfrak{M}$, die jeden Satz aus Γ wahr macht, auch S wahr macht (d.h. *wenn* $\mathfrak{M} \models \mathsf{P}$ gilt für jeden Satz P aus Γ, *dann* muss auch $\mathfrak{M} \models \mathsf{S}$ gelten).
  - (*i*) *Korrektheit von PL1:* Wenn $\Gamma \vdash \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\Gamma \models \mathsf{S}$.
  - (*ii*) *Vollständigkeit von PL1:* Wenn $\Gamma \models \mathsf{S}$, gilt, dann auch $\Gamma \vdash \mathsf{S}$.
- Ein Satz S heißt *logisch wahr* gdw. für jede Interpretation $\mathfrak{M}$ gilt: $\mathfrak{M} \models \mathsf{S}$ (man notiert auch: $\models \mathsf{S}$).
  Letzteres ist der Fall gdw. gilt, dass $\varnothing \models \mathsf{S}$.
- Aufgrund dieser allgemeinen Fälle ergeben sich auch die folgenden speziellen Fälle von Korrektheit und Vollständigkeit (in welchen $\Gamma = \varnothing$):
  - (*i*) Wenn $\vdash \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\models \mathsf{S}$.
  - (*ii*) Wenn $\models \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\vdash \mathsf{S}$.
- Satz 1. *Seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei Interpretationen mit demselben Gegenstandsbereich. Zudem weisen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ allen Prädikat- und Individuenbuchstaben in der Formel* P *dieselbe Extension zu. Seien g_1 und g_2 zwei Variablenbelegungen, welche den freien Variablen in* P *dieselben Objekte zuweisen. Dann gilt $\mathfrak{M}_1 \models \mathsf{P}\,[g_1]$ gdw. $\mathfrak{M}_2 \models \mathsf{P}\,[g_2]$.*

2. Korrektheit von PL1

- *Beweis:* Der Beweis verfährt analog dem Beweis im Falle von AL. Es wird gezeigt, dass jeder Satz S in einer Zeile in einem Beweis aus den bei der Ableitung von S vorausgesetzten Annahmen folgt. Wiederum heiße eine Zeile in einer Ableitung, in der ein Satz S hergeleitet wird, der *nicht* aus den Annahmen folgt, die bei der Ableitung von S vorausgesetzt werden, *ungültiger Schritt*.

Wir zeigen induktiv (über die Anzahl der Schritte in einem Beweis), dass es keinen ungültigen Schritt in einer Ableitung geben kann. Wir betrachten also den *n*-ten Schritt der Ableitung und setzen (als Induktionsannahme) voraus, dass alle früheren Schritte gültig sind. Wir müssen zeigen, dass auch der *n*-te Schritt gültig ist. Dazu müssen wir wiederum eine Fallunterscheidung durchführen und alle möglichen Regeln betrachten, die zur Herleitung der *n*-ten Zeile herangezogen werden können. Im Falle der aussagenlogischen Junktoren verfährt der Beweis ganz analog zum bereits im Zusammenhang mit AL geführten Beweis. Im Folgenden wird als Beispiel nur einer der im Rahmen von PL1 neu hinzukommenden Fälle erörtert, in dem ein Quantor im Spiel ist:

- $\exists$ **Elim**: Angenommen, der *n*-te Schritt besteht in der Herleitung eines Satzes R mit Hilfe der Regel $\exists$ **Elim**. Dann muss in dem Beweis zuvor eine Zeile mit dem Satz $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$ vorgekommen sein, sowie ein Unterbeweis, in welchem mit Hilfe einer neuen Konstante c und der Annahme P(c) der Satz R hergeleitet wurde. Es seien $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ die Sätze, die beim Schritt *n* als Annahmen gelten. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:
  $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k \models \exists \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$ und $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k, \mathsf{P(c)} \models \mathsf{R}$.
  Zu zeigen bleibt, dass dann auch $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k \models \mathsf{R}$ gilt. Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Interpretation, für welche $\mathfrak{M} \models \mathsf{A}_i$ gilt (für alle i mit $1 \leq i \leq k$).
  Zu zeigen ist: $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}$. Da $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k \models \exists \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$ gilt, muss auch $\mathfrak{M} \models \exists \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$ gelten. Demnach gibt es ein Objekt b im Gegenstandsbereich von $\mathfrak{M}$, welches P(x) erfüllt. Es sei $\mathfrak{M}'$ eine Interpretation, welche sich von $\mathfrak{M}$ nur darin unterscheide, dass sie der Konstanten c das Objekt b zuweise. Dann muss $\mathfrak{M}' \models \mathsf{P(c)}$ gelten. Nach Satz 1 auf S. 57 gilt auch $\mathfrak{M}' \models \mathsf{A}_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$ (c kann als ‚neue' Konstante weder in $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k, \exists \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$, noch in R vorkommen). Demnach gilt auch $\mathfrak{M}' \models \mathsf{R}$ (da R aus $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ und P(c) folgt (s.o.)). Da aber c nicht in R vorkommt, gilt wiederum nach Satz 1 (S. 57), dass $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}$. QED
  Der Fall $\forall$ **Intro** wird entsprechend bewiesen.

Aufgaben

1 Beweisen Sie Satz 1 und führen Sie den obigen Korrektheitsbeweis weiter für die (wesentlich einfacheren Fälle) $\forall$ **Elim** und $\exists$ **Intro**.

3. Vollständigkeit von PL1

3.1 Erweiterung um neue Konstanten

- Der Vollständigkeitsbeweis wird im Folgenden in mehrere Schritte unterteilt. Zur Durchführung des Beweises ist es zunächst erforderlich, eine prädikatenlogische Sprache L um neue Konstanten zu ergänzen, mit welchen Objekte benannt werden können, deren Existenz von wahren Existenzaussagen $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x})$ behauptet wird. Zu diesem Zweck erweitern wir L zu L', indem wir zu jeder Wff $\mathsf{P}(\mathsf{x})$, in der nur eine Variable frei vorkommt, eine neue Konstante $\mathsf{c}_{\mathsf{P}(\mathsf{x})}$ bilden (einen sog. *Zeugen* für $\mathsf{P}(\mathsf{x})$).
- Ein Problem stellen Formeln der Sprache L' wie etwa $\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{c}_{\mathsf{P}(\mathsf{x})})$ dar, in welchen neu eingeführte Konstanten vorkommen. Diese gehören nicht zur Ausgangssprache L, so dass wir über keine Zeugen für solche Formeln verfügen. Um auch für solche Formeln Zeugen zu erhalten, müssen wir das Verfahren iteriert anwenden. Dazu definieren wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset ...$ von Sprachen, wobei $L_0 = L$ und $L_{n+1} = L'_n$. Die gewünschte Sprache L_H sei die Vereinigung aller L_n. In L_H gibt es einen Zeugen für *jede* Formel von L_H. Jeder Zeuge wird dabei auf einer Stufe des oben beschriebenen Prozesses ‚erzeugt'.
- LEMMA 1. *Sei* c_P *eine Konstante, die auf der Stufe* $n + 1$ *erzeugt wird. Ist* Q *eine Wff der Stufe* L_n*, dann kommt* c_P *nicht in* Q *vor.*

3.2 Die Henkin-Theorie

- Die *Henkin Theorie* $\mathcal{H}$ ist eine Menge von Sätzen der Sprache L_H. Es seien c und d beliebige Konstanten und $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ eine beliebige Formel (mit genau einer freien Variablen) der Sprache L_H. $\mathcal{H}$ enthält alle Sätze, welche von der Form H1, H2, H3, H4 oder H5 sind:

  H1 $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{c}_{\mathsf{P}(\mathsf{x})})$ (ein sog. *Zeugen-Axiom* für $\mathsf{P}(\mathsf{x})$)

  H2 $\mathsf{P}(\mathsf{c}) \rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x})$

  H3 $\neg\forall \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\ \neg\mathsf{P}(\mathsf{x})$

  H4 $\mathsf{c} = \mathsf{c}$

  H5 $(\mathsf{P}(\mathsf{c}) \wedge \mathsf{c} = \mathsf{d}) \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{d})$

- LEMMA 2. *Sind* c_P *und* c_Q *zwei Zeugen und wurde* c_Q *nicht vor* c_P *erzeugt, dann kommt* c_Q *nicht im Zeugen-Axiom für* P *vor.*
- SATZ 3. *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine Struktur für die Sprache L. Dann kann den Zeugen eine Extension im Gegenstandsbereich von* $\mathfrak{M}$ *zugewiesen werden, so dass alle Sätze von* $\mathcal{H}$ *wahr sind.*

3.3 Das Eliminations-Theorem

- SATZ 4 (ELIMINATIONS-THEOREM). *Sei p ein Beweis mit der Konklusion* S. S *sei ein Satz der Sprache L und die Prämissen von p seien die Sätze* $\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n$ *der Sprache L sowie Sätze aus* $\mathcal{H}$*. Dann gibt es einen Beweis p' von* S*, welcher nur* $\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n$ *als Prämissen benötigt.*

  Der Beweis wird im Folgenden in mehrere Schritte unterteilt.
- SATZ 5 (DEDUKTIONS-THEOREM). *Wenn* $\mathcal{T} \cup \{\mathsf{P}\} \vdash \mathsf{Q}$*, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$.
- SATZ 6. *Wenn* $\mathcal{T} \cup \{\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n\} \vdash \mathsf{Q}$ *und für jedes i (mit* $1 \leq i \leq n$*) gilt, dass* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{P}_i$*, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{Q}$.
- LEMMA 7. *Sei* $\mathcal{T}$ *eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L.* P*,* Q *und* R *seien Sätze von L. Dann gilt:*

  (1) *Wenn* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ *und* $\mathcal{T} \vdash \neg\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$*, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{Q}$.

  (2) *Wenn* $\mathcal{T} \vdash (\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{R}$*, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \neg\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}$ *und* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$.
- LEMMA 8. *Sei* $\mathcal{T}$ *eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L.* Q *sei ein Satz,* $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ *eine Wff von L, in der nur eine Variable frei und* c *nicht vorkommt. Wenn* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{P}(\mathsf{c}) \rightarrow \mathsf{Q}$ *gilt und* c *nicht in* $\mathcal{T}$ *oder* Q *vorkommt, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{Q}$.
- LEMMA 9. *Sei* $\mathcal{T}$ *eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L.* Q *sei ein Satz,* $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ *eine Wff von L, in der nur eine Variable frei und* c *nicht vorkommt. Wenn* $\mathcal{T} \cup \{\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{c})\} \vdash \mathsf{Q}$ *gilt und* c *nicht in* $\mathcal{T}$ *oder* Q *vorkommt, dann gilt auch* $\mathcal{T} \vdash \mathsf{Q}$.
- LEMMA 10. *Sei* $\mathcal{T}$ *eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L,* $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ *sei eine Wff von L mit nur einer freien Variablen;* c *und* d *seien Konstanten. Dann gilt:*

$\vdash \mathsf{P}(\mathsf{c}) \to \exists \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x})$

$\vdash \neg\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P}(\mathsf{x})$

$\vdash (\mathsf{P}(\mathsf{c}) \wedge \mathsf{c} = \mathsf{d}) \to \mathsf{P}(\mathsf{d})$

$\vdash \mathsf{c} = \mathsf{c}$

- *Beweis des Eliminationstheorems:* Sei p ein prädikatenlogischer Beweis mit einer Konklusion der Sprache L. Alle Prämissen von p seien Sätze der Sprache L oder Sätze aus $\mathcal{H}$ (von letzteren gebe es höchstens k-viele ($k \in \mathbb{N}$)). Im Folgenden wird induktiv gezeigt, wie die Prämissen aus $\mathcal{H}$ eliminiert werden können.
  Induktionsanfang ($k = 0$): Hier gibt es keine zu eliminierenden Prämissen, so dass nichts weiter bewiesen werden muss.
  Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung gilt für k-viele Prämissen (Ind.-Ann.), und zeigen, dass diese dann auch auf $k + 1$-viele Prämissen zutrifft. Hier können zwei Fälle unterschieden werden:
  Fall 1: Mindestens eine der zu eliminierenden Prämissen P besitzt dieselbe Form wie eine der in Lemma 10 aufgeführten *Wffs*. Dann kann P aber mit Hilfe von Satz 6 eliminiert werden. Es bleiben noch k-viele Prämissen übrig, für welche die Behauptung aber aufgrund der Induktionsannahme gilt.
  Fall 2: Alle der zu eliminierenden Prämissen sind Zeugen-Axiome. Wir eliminieren eine Prämisse der Form $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \mathsf{P}(\mathsf{c})$, deren Zeuge c nicht früher als irgendein anderer Zeuge ‚erzeugt' wurde, der in den Prämissen vorkommt. Aufgrund von Lemma 2 kommt c nicht in den anderen zu eliminierenden Prämissen vor. Daher taucht c auch nicht in den Prämissen oder der Konklusion auf. Aufgrund von Lemma 9 kann nun $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \mathsf{P}(\mathsf{c})$ eliminiert werden. Damit bleiben nur noch k-viele Prämissen übrig, was aufgrund der Induktionsannahme unproblematisch ist.

3.4 Das Henkin-Modell

- Theorem 11 (Henkin-Modell-Theorem). *Sei h eine aussagenlogische Bewertung der Sprache L_H, die allen Sätzen aus $\mathcal{H}$ den Wahrheitswert* wahr *zuweist. Dann gibt es eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{M}_h$, so dass für alle Sätze S, für die $h(\mathsf{S}) =$* wahr, *auch gilt: $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$.*

- Um dieses Theorem nachzuweisen, wird im Folgenden zunächst gezeigt, wie das fragliche Modell $\mathfrak{M}_h$ ausgehend von h konstruiert werden kann. In einem zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$ gilt für genau die Sätze, für die $h(\mathsf{S}) =$ wahr ist.
  Der Einfachheit halber wird das Theorem im Folgenden nur für prädikatenlogische Sprachen *ohne* Identität nachgewiesen. Der Beweis für Sprachen mit Identität verfährt bis auf eine kleinere Komplikation wie der folgende (siehe Barwise & Etchemendy, Kapitel 19.5).
- Die für den Beweis benötigte Interpretation $\mathfrak{M}_h$ definieren wir dabei ausgehend von der besagten aussagenlogischen Bewertung h wie folgt:
- $\mathfrak{M}_h(\forall)$ sei die Menge der Individuenausdrücke der Sprache L_H.
- Für jeden Individuenausdruck c gilt: $\mathfrak{M}_h(\mathsf{c}) = \mathsf{c}$ (d. h. jede Individuenkonstante referiert auf sich selbst).
- Für jeden n-stelligen Prädikat- bzw. Relationsausdruck R gilt:
  $\mathfrak{M}_h(\mathsf{R}) = \{\langle \mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_n\rangle \mid h(\mathsf{R}(\mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_n)) = \text{WAHR}\}$
  ($\mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_n$ seien dabei beliebige Individuenkonstanten der Sprache L_H.)
- Der zweite Schritt des Beweises von Theorem 11 erfolgt durch das folgende Lemma. Der Beweis verfährt induktiv über die Komplexität, wobei die Komplexität einer atomaren Formel gleich 0 sei. Ist die Komplexität von P gleich n, so sei die Komplexität von $\neg\mathsf{P}$ und $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{P}$ gleich $n + 1$. Ist n die Komplexität der komplexeren Formel des Paares P und Q, so sei die Komplexität von $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ gleich $n + 1$. Ist die Komplexität von P gleich n, so sei schließlich die Komplexität von $\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P}$ gleich $n + 3$ (da wir zur Behandlung des Allquantors auf die Gültigkeit von $\neg\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P}(\mathsf{x})$ zurückgreifen).
- Lemma 13. *Für jeden Satz S der Sprache L_H gilt:*

  $$\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S} \text{ gdw. } h(\mathsf{S}) = \text{WAHR}.$$

  Beweis: Der *Induktionsanfang* ist aufgrund der Definition von $\mathfrak{M}_h$ unproblematisch. Also nehmen wir als *Induktionsannahme* an, das Lemma gelte für alle Sätze S, deren Komplexität $\leq k$ ist. Zu zeigen bleibt, dass die Behauptung dann auch für jeden Satz S gilt, dessen Komplexität $\leq k + 1$ ist. Wiederum sind eine Reihe von Fällen zu unterscheiden (je nachdem, welchen Hauptjunktor die fragliche Formel besitzt).

Im Folgenden wird der Beweis im Falle eines aussagenlogischen Junktors und in beiden Fällen mit Quantoren vorgeführt:

- Angenommen, S ist von der Form $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$. Wenn $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$ gilt, dann gilt $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}$ oder $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{Q}$. Angenommen, es gilt Ersteres. Da die Komplexität von $\mathsf{P} \leq k$ ist, gilt nach Induktionsannahme, dass $h(\mathsf{P}) = \textsc{wahr}$. Dann gilt aber auch $h(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) = \textsc{wahr}$ (das gleiche Ergebnis ergibt sich auch, wenn man annimmt, dass $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{Q}$). Der Beweis der anderen Richtung verfährt entsprechend.
- Angenommen, S ist von der Form $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$. Wenn $\mathfrak{M}_h \models \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$ gilt, dann gibt es eine Konstante c (da jedes Objekt im Gegenstandsbereich einen Namen besitzt), so dass $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P(c)}$. Da die Komplexität von $\mathsf{P(c)}$ kleiner der Komplexität von S ist, ergibt sich aufgrund der Induktionsannahme, dass $h(\mathsf{P(c)}) = \textsc{wahr}$. Da h alle Sätze von $\mathcal{H}$ wahr macht und $\mathsf{P(c)} \rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$ zu $\mathcal{H}$ gehört, macht h $\mathsf{P(c)} \rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$ und somit $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$ wahr. Um die andere Richtung nachzuweisen, nehmen wir an, es gilt $h(\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}) = \textsc{wahr}$. h macht auch das Zeugen-Axiom $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{P(x)} \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{c}_{\mathsf{P(x)}})$ aus $\mathcal{H}$ wahr. Dann muss aber auch $h(\mathsf{P}(\mathsf{c}_{\mathsf{P(x)}})) = \textsc{wahr}$ gelten. Aufgrund der Ind.-Ann. gilt dann $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(\mathsf{c}_{\mathsf{P(x)}})$ und somit auch $\mathfrak{M}_h \models \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}$.
- Angenommen, S ist von der Form $\forall \mathsf{x}\ \mathsf{P}$. Wenn $\mathfrak{M}_h \models \forall \mathsf{x}\ \mathsf{P}$ gilt, dann ist $\exists \mathsf{x}\ \neg \mathsf{P}$ falsch in $\mathfrak{M}_h$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt dann aber, dass $h(\exists \mathsf{x}\ \neg \mathsf{P}) = \textsc{falsch}$. Da h alle Sätze von $\mathcal{H}$ wahr macht und $\neg \forall \mathsf{x}\ \mathsf{P(x)} \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\ \neg \mathsf{P(x)}$ zu $\mathcal{H}$ gehört, macht h auch diesen Satz wahr. Dann muss aber auch $h(\neg \forall \mathsf{x}\ \mathsf{P(x)}) = \textsc{falsch}$ und demnach $h(\forall \mathsf{x}\ \mathsf{P(x)}) = \textsc{wahr}$ gelten. Der Beweis der anderen Richtung verfährt analog.
- *Beweis des Vollständigkeitssatzes:* Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen der Sprache L und S ein Satz dieser Sprache. Es gelte: $\mathcal{T} \models \mathsf{S}$. Zu zeigen bleibt, dass auch $\mathcal{T} \vdash \mathsf{S}$ gilt. Da $\mathcal{T} \models \mathsf{S}$, gibt es keine Interpretation, welche jeden Satz aus $\mathcal{T} \cup \{\neg \mathsf{S}\}$ wahr macht. Aufgrund von Theorem 11 kann es keine aussagenlogische Bewertung geben, welche allen Sätzen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{H} \cup \{\neg \mathsf{S}\}$ den Wert $\textsc{wahr}$ zuweist (gäbe es eine solche Bewertung, gäbe es aufgrund von Theorem 11 eine Interpretation $\mathfrak{M}_h$, welche jeden Satz aus $\mathcal{T} \cup \{\neg \mathsf{S}\}$ wahr machen würde). Also folgt S aussagenlogisch aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$. Aufgrund der Vollständigkeit von AL gibt es dann aber einen Beweis p mit der Konklusion S und Prämissen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$.

Aufgrund des Eliminationstheorems können wir mit Hilfe der Quantorenregeln den Beweis p in einen Beweis p' von S umwandeln, der nur Prämissen aus $\mathcal{T}$ verwendet. Also gilt $\mathcal{T} \vdash \mathsf{S}$.