VOLLSTÄNDIGKEIT UND KORREKTHEIT DER AUSSAGENLOGIK

1. Die Sprache der Aussagenlogik: Semantik

1.1 Wahrheitswertbelegungen

- Eine *Wahrheitswertbelegung* für eine Sprache der Aussagenlogik (AL) weist jedem Aussagebuchstaben genau einen der beiden Wahrheitswerte WAHR oder FALSCH zu. Damit eine Wahrheitswertbelegung h jeder Wff_{AL} einen Wahrheitswert zuweist, wird h durch die folgenden Regeln erweitert zur Funktion $\hat{h}$:
- $\hat{h}(\mathsf{Q}) = h(\mathsf{Q})$ für (‚atomare') Aussagebuchstaben Q.
- $\hat{h}(\neg\mathsf{Q}) = \text{WAHR}$ gdw. $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \text{FALSCH}$;
- $\hat{h}(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R}) = \text{WAHR}$ gdw. $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \text{WAHR}$ und $\hat{h}(\mathsf{R}) = \text{WAHR}$;
- $\hat{h}(\mathsf{Q} \vee \mathsf{R}) = \text{WAHR}$ gdw. $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \text{WAHR}$ und/oder $\hat{h}(\mathsf{R}) = \text{WAHR}$;
- $\hat{h}(\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}) = \text{WAHR}$ gdw. $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \text{FALSCH}$ und/oder $\hat{h}(\mathsf{R}) = \text{WAHR}$;
- $\hat{h}(\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{R}) = \text{WAHR}$ gdw. $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \hat{h}(\mathsf{R})$.

1.2 Aussagenlogische Wahrheit & Folgerung

- Ein Satz S *folgt tautologisch* aus einer Menge $\Gamma = \{\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \mathsf{P}_3, ...\}$ (in Zeichen: $\Gamma \models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$) gdw. für jede Wahrheitswertbelegung h gilt:
  Wenn für jede Formel P_i aus Γ gilt, dass $\hat{h}(\mathsf{P}_i) = \text{WAHR}$,
  dann gilt auch $\hat{h}(\mathsf{S}) = \text{WAHR}$.
- Ein Satz S heißt *aussagenlogisch wahr* oder *tautologisch* gdw. für jede Wahrheitswertbelegung h gilt: $\hat{h}(\mathsf{S}) = \text{WAHR}$ (man notiert auch: $\models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$). Letzteres ist der Fall gdw. $\varnothing \models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt.

1.3 Vollständigkeit & Korrektheit von AL

(*i*) *Korrektheit von AL:* Wenn $\Gamma \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\Gamma \models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$.

(*ii*) *Vollständigkeit von AL:* Wenn $\Gamma \models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\Gamma \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$.

- Aufgrund dieser allgemeinen Fälle ergeben sich auch die folgenden speziellen Fälle von Korrektheit und Vollständigkeit (in welchen $\Gamma = \varnothing$):

  (*i*) Wenn $\vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$.

  (*ii*) Wenn $\models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt, dann auch $\vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$.

2. Korrektheit von AL

- *Beweis:* Wir nehmen an, es gilt $\Gamma \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ (dabei sei $\Gamma = \{\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n\}$). Zu zeigen bleibt, dass $\Gamma \models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$ gilt. Um dies zu zeigen, wird im Folgenden demonstriert, dass *jeder* Satz S, der in einem Beweis auftritt, aus den bei der Ableitung von S vorausgesetzten Annahmen folgt. Der Beweis verfährt indirekt. Wir nehmen also an, es gäbe eine Zeile mit dem Satz S in einer Ableitung, welcher *nicht* aus den Sätzen folgt, die bei der Ableitung von S als Annahmen gelten. Eine solche Zeile heiße *ungültiger Schritt*. Betrachten wir den ersten ungültigen Schritt in der Ableitung. Die entsprechende Zeile wurde mit einer der zwölf Regeln von $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ hergeleitet. Es müssen also zwölf Fälle unterschieden werden. Da aber jede dieser zwölf Möglichkeiten zu einem Widerspruch geführt werden kann, ist die AL korrekt. Im Folgenden werden als Beispiele nur zwei der zwölf Fälle erörtert:
- $\rightarrow$ **Elim**: Angenommen, der erste ungültige Schritt besteht in der Herleitung eines Satzes R mit Hilfe der Regel $\rightarrow$ **Elim**. Dann müssen zuvor in der Ableitung die Sätze Q und $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ aufgetreten sein. Es seien $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_n$ die bei der Herleitung von R vorausgesetzten Annahmen. Ist die Herleitung von R der erste ungültige Schritt, folgt R nicht aus $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_n$. D. h. es gibt eine Wahrheitswertbelegung h, so dass $\hat{h}(\mathsf{R}) = \text{FALSCH}$, obwohl $\hat{h}(\mathsf{A}_1) = \hat{h}(\mathsf{A}_2) = ... = \hat{h}(\mathsf{A}_n) = \text{WAHR}$. Dies aber führt zu einem Widerspruch, da aufgrund der Annahme Q und $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ aus $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_n$ folgen, so dass auch $\hat{h}(\mathsf{Q}) = \hat{h}(\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}) = \text{WAHR}$.
- $\rightarrow$ **Intro**: Angenommen, der erste ungültige Schritt besteht in der Herleitung eines Satzes $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ mit Hilfe der Regel $\rightarrow$ **Intro**. Es seien $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_n$ die bei der Herleitung von $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ vorausgesetzten Annahmen. Dann muss zuvor R mit Hilfe von $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_n$ und Q hergeleitet worden sein. Aufgrund der Annahme gibt es eine Wahrheitswertbelegung h, so dass

$\hat{h}(A_1) = \hat{h}(A_2) = ... = \hat{h}(A_n) = $ WAHR, aber $\hat{h}(Q \rightarrow R) = $ FALSCH. Demnach ist $\hat{h}(Q) = $ WAHR und $\hat{h}(R) = $ FALSCH. Dies führt aber zu einem Widerspruch, da aufgrund der Annahme R aus $A_1, ..., A_n$ und Q folgt.

3. Vollständigkeit von AL

- Um die Vollständigkeit von AL zu zeigen, beweisen wir die Kontraposition der Behauptung, d. h. wir zeigen:

  Wenn $\Gamma \nvdash_T S$ gilt, dann auch $\Gamma \nvDash_T S$.

  Letzteres besagt, dass es eine Wahrheitswertbelegung gibt, welche alle Sätze aus Γ wahr, S aber falsch und somit $\neg S$ wahr macht. Eine solche Wahrheitswertbelegung macht demnach alle Sätze aus $\Gamma \cup \{\neg S\}$ wahr. Gibt es eine Wahrheitswertbelegung, welche alle Sätze einer Menge Δ wahr macht, wird Δ auch WT-*erfüllbar* genannt. Es gelten folgende Beziehungen:
- SATZ 1. $\Gamma \vDash_T S$ *gdw.* $\Gamma \cup \{\neg S\}$ *nicht* WT-*erfüllbar ist.*
- LEMMA 2. $\Gamma \vdash_T S$ *gdw.* $\Gamma \cup \{\neg S\} \vdash_T \bot$.
- Aufgrund von Lemma 2 gilt auch: $\Gamma \nvdash_T S$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg S\} \nvdash_T \bot$.
  Gilt $\Delta \nvdash_T \bot$, wird Δ auch *formal konsistent* genannt.
  Der Vollständigkeitssatz kann demnach auch wie folgt formuliert werden:

  Jede formal konsistente Theorie ist WT-*erfüllbar.*
- Der Beweis der Vollständigkeit verfährt in zwei Schritten
  - (*i*) *Vollständigkeit für formal vollständige Mengen:*
    Zunächst zeigen wir, dass die Behauptung für Mengen gilt, die *formal vollständig* sind. Dabei heißt eine Menge Γ *formal vollständig* gdw. für jeden Satz S gilt: $\Gamma \vdash_T S$ oder $\Gamma \vdash_T \neg S$
  - (*ii*) *Jede formal konsistente Menge ist erweiterbar zu einer formal vollständigen Menge.*
- LEMMA 3. *Sei* Γ *eine formal konsistente und formal vollständige Menge.* R *und* S *seien Sätze der Sprache von* AL. *Dann gilt:*

(*i*) $\Gamma \vdash_T (R \wedge S)$ gdw. $\Gamma \vdash_T R$ und $\Gamma \vdash_T S$.
(*ii*) $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$ gdw. $\Gamma \vdash_T R$ oder $\Gamma \vdash_T S$.
(*iii*) $\Gamma \vdash_T \neg S$ gdw. $\Gamma \nvdash_T S$.
(*iv*) $\Gamma \vdash_T (R \rightarrow S)$ gdw. $\Gamma \nvdash_T R$ oder $\Gamma \vdash_T S$.
(*v*) $\Gamma \vdash_T (R \leftrightarrow S)$ gdw. $(\Gamma \vdash_T R$ und $\Gamma \vdash_T S)$ oder $(\Gamma \nvdash_T R$ und $\Gamma \nvdash_T S)$

- SATZ 4. *Jede formal konsistente und formal vollständige Menge von Sätzen ist* WT-*erfüllbar.*
  Beweisskizze: Sei Γ eine formal konsistente und formal vollständige Menge von Sätzen der Sprache von AL. Sei *h* eine Wahrheitswertbelegung, die einem Aussagebuchstaben A den Wert WAHR zuweist gdw. $\Gamma \vdash_T A$. Dann gilt für alle Sätze S: $\hat{h}(S) = $ WAHR gdw. $\Gamma \vdash_T S$.
  Der weitere Beweis verfährt induktiv. Der Induktionsanfang ist dabei aufgrund der Definition von *h* trivial. Der Induktionsschritt kann mit Hilfe von Lemma 3 leicht gezeigt werden.
  Da jeder Satz in Γ auch aus Γ hergeleitet werden kann, zeigt der Satz, dass *h* alle Sätze in Γ wahr macht und Γ demnach WT-erfüllbar ist.
- LEMMA 5. *Eine Menge* Γ *von Sätzen ist formal vollständig gdw. für jeden Aussagebuchstaben* A *gilt:* $\Gamma \vdash_T A$ *oder* $\Gamma \vdash_T \neg A$.
  Beweisskizze: Die erste Hälfte des Beweises („von links nach rechts") ergibt sich bereits aus der Definition des Begriffes *formal vollständig*. Die zweite Hälfte des Beweises verfährt wiederum induktiv.
- SATZ 6. *Jede formal konsistente Menge* Γ *von Sätzen der Sprache von* AL *kann erweitert werden zu einer Menge, die formal konsistent* und *formal vollständig ist.*
  Beweis: Es sei $S_1, S_2, S_3, ...$, eine Auflistung aller Sätze der Sprache von AL (etwa in alphabetischer Reihenfolge). Nun definieren wir eine Folge von Erweiterungen der Menge Γ: Γ_0 sei Γ. Γ_{i+1} sei $\Gamma_i \cup \{S_i\}$, falls $\Gamma_i \nvdash_T \neg S_i$ gilt. Anderenfalls sei $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$. Γ' sei die Vereinigung aller Γ_i. Γ' ist formal konsistent:
  Dazu genügt es zu zeigen, dass jedes Γ_i formal konsistent ist (da in einem Beweis im Rahmen von Γ' nur endlich viele Annahmen vorkommen können, welche bereits in einem der Γ_i enthalten sein müssen).
  Γ_0 ist nach Annahme konsistent. Nehmen wir an, Γ_i ist konsistent;

zu zeigen bleibt, dass auch Γ_{i+1} konsistent ist. Ist $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$, ist Γ_{i+1} aufgrund der Induktionsannahme konsistent. Ist $\Gamma_{i+1} \neq \Gamma_i$, gilt nach Konstruktion von Γ_{i+1}, dass $\Gamma_i \nvdash_{\mathrm{T}} \neg\mathsf{S}_i$. Dann muss nach Lemma 2 aber auch $\Gamma_{i+1} = \Gamma \cup \{\mathsf{S}_i\} \nvdash_{\mathrm{T}} \bot$ der Fall sein.
Γ' ist aber auch formal vollständig. Sei S ein beliebiger Satz; dann ist $\mathsf{S} = \mathsf{S}_{i+1}$ für ein $i \geq 0$ und es gilt: $\Gamma_i \vdash_{\mathrm{T}} \neg\mathsf{S}_{i+1}$ oder $\Gamma_{i+1} \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}_{i+1}$.

- VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ.
  Beweis: Angenommen, $\Gamma \nvdash_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$. Dann ist nach Lemma 2 $\Gamma \cup \{\neg\mathsf{S}\}$ formal konsistent. Diese Menge kann nach Satz 6 zu einer Menge erweitert werden, die formal konsistent und formal vollständig ist. Diese ist nach Satz 4 WT-erfüllbar durch eine Wahrheitswertbelegung h. h macht demnach insbesondere jeden Satz aus Γ und $\neg\mathsf{S}$ wahr (bzw. S falsch), was zeigt, dass $\Gamma \not\models_{\mathrm{T}} \mathsf{S}$.
- KOMPAKTHEITSSATZ FÜR AL. *Γ sei eine Menge von Sätzen der aussagenlogischen Sprache. Ist jede endliche Teilmenge von Γ WT-erfüllbar, so auch Γ selbst.*
  Beweis: Gezeigt wird die Kontraposition. Angenommen, Γ ist nicht WT-erfüllbar. Dann ist Γ nach dem Vollständigkeitssatz nicht formal konsistent, d.h., dass $\Gamma \vdash_{\mathrm{T}} \bot$. Ein solcher Beweis verfügt nur über endlich viele Prämissen $\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n$. Nach dem Korrektheitssatz gibt es so aber mit $\{\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n\}$ eine endliche nicht WT-erfüllbare Menge.

Aufgaben

1 Zeigen Sie, dass für jede Wahrheitswertbelegung h gilt:

a) Wenn $\hat{h}(\mathsf{Q} \vee \mathsf{R}) = $ WAHR und $\hat{h}(\mathsf{Q}) = $ FALSCH, dann ist $\hat{h}(\mathsf{R}) = $ WAHR.

b) Wenn $\hat{h}(\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}) = $ WAHR und $\hat{h}(\mathsf{R}) = $ FALSCH, dann ist $\hat{h}(\mathsf{Q}) = $ FALSCH.

c) Wenn $\hat{h}(\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{R}) = $ WAHR und $\hat{h}(\mathsf{Q}) = $ WAHR, dann ist $\hat{h}(\mathsf{R}) = $ WAHR.

2 Beweisen Sie Satz 1!

3 Beweisen Sie Lemma 3 (*i*)–(*v*)!

4 Vervollständigen Sie den induktiven Teil von Satz 4!

5 Vervollständigen Sie Beweis von Lemma 5!