GENERALISIERTE QUANTOREN & DIE THEORIE DER DEFINITEN KENNZEICHNUNGEN

1. Einleitung

- Viele umgangssprachliche Sätze sind von der Form QAB, wobei Q ein sog. *Determinator*(*-enausdruck*) wie *alle*, *einige*, *der*, *mehr als die Hälfte der*, *mindestens drei*, *kein*, *viele*, *beide*, *Annes* usw. ist, A eine Nominalphrase wie *Menschen*, *Katzen*, *Dinge* und B eine Verbalphrase wie *laufen*, *sind sterblich*. Die Determinatoren drücken dabei (oftmals quantitative) 2-stellige Relationen zwischen A und B aus, welche gelegentlich mit Hilfe von $\forall$ und $\exists$ ausgedrückt werden können—aber nicht immer (wie etwa im Falle von *mehr als die Hälfte aller As sind Bs*). Ergänzt man die Sprache von PL1 um entsprechende Quantifikationsmöglichkeiten, nennt man die entsprechenden Ausdrücke *generalisierte Quantoren*.
- Außer den Determinatoren *alle* und *einige* können noch weitere Determinatoren mit prädikatenlogischen Mitteln dargestellt werden. So entspricht *kein* etwa *nicht einige* usw. In den Teilen 2. und 3. werden weitere Determinatoren vorgestellt, die ebenfalls mit den Mitteln von PL1 ausgedrückt werden können. In 4. werden demgegenüber Determinatoren erörtert, welche nicht in diesem Sinne auf prädikatenlogische Ausdrucksmittel reduziert werden können.

2. Numerische Quantifikationen

- Unter *numerischen Behauptungen* versteht man Aussagen wie folgende:

(1) *Mindestens zwei Personen haben den Unfall beobachtet*

(2) *Mindestens drei Personen haben den Unfall beobachtet*

(3) *Höchstens zwei Personen haben den Unfall beobachtet*

(4) *Genau zwei Personen haben den Unfall beobachtet*

Im Rahmen von PL1 kann (1) durch (5) und (2) durch (6) ausgedrückt werden. (3) kann ausgedrückt werden durch die Negation von (6) bzw. durch (den äquivalenten Satz) (7). (4) kann ausgedrückt werden durch die Konjunktion von (5) und (7) bzw. durch (8):

(5) $\exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$

(6) $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

(7) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)]$

(8) $\exists x\, \exists y\, [A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\, (A(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$

- Der Übersichtlichkeit halber werden folgende Abkürzungen verwendet:

  $\exists^{\geq n} x\, P(x)$ für *Mindestens n Objekte erfüllen* $P(x)$

  $\exists^{\leq n} x\, P(x)$ für *Höchstens n Objekte erfüllen* $P(x)$

  $\exists^{!n} x\, P(x)$ für *Genau n Objekte erfüllen* $P(x)$

  Insbesondere kürzt so etwa $\exists^{!1} x\, P(x)$ die folgende Formel ab (welche gelegentlich auch einfach durch „$\exists! x\, P(x)$“ bezeichnet wird):

  $\exists x\, [P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \rightarrow y = x)]$

- Um also $\exists^{\geq 4} x\, P(x)$ auszudrücken, werden vier Existenzquantoren und sechs ($= 3 + 2 + 1$) Ungleichheiten benötigt. Um $\exists^{\geq 5} x\, P(x)$ auszudrücken, werden fünf Existenzquantoren und zehn ($= 4 + 3 + 2 + 1$) Ungleichheiten benötigt usw..

3. Russells Kennzeichnungstheorie

3.1 Definite Kennzeichnungen

- Definite Kennzeichnungen sind beschreibende Bezeichnungen, welche die Aufgabe haben, auf genau ein Objekt zu referieren:

  der gegenwärtige König von Frankreich

  der Autor von „Die Dialektik der Aufklärung“

  der gegenwärtige Premierminister von England

- Nach Freges Analyse sind Sätze wahrheitswertlos, in welchen Terme ohne Referenzobjekt vorkommen. Bertrand Russell (1872–1970) schlug mit seiner *Kennzeichnungstheorie* eine Alternative zu Freges Theorie vor, derzufolge auch Sätze mit Kennzeichnungen ohne Referenzobjekt wahr oder falsch sind und somit keine Verletzung des *Bivalenzprinzips* darstellen.

3.2 Russells Analyse von Sätzen mit definiten Kennzeichnungen

- Nach Russells Theorie besagt ein Satz wie (1) soviel wie (2a–c).

(1) *Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahlköpfig*

(2a) *Es gibt mindestens ein Objekt* x*, das gegenwärtig König von Frankreich ist, und*

(2b) *es gibt kein anderes Objekt* y*, das gegenwärtig König von Frankreich ist, und*

(2c) *dieses Objekt* x *ist kahlköpfig*

Demnach sind Sätze wie (1) von der folgenden logischen Form:

(3) $\exists x\,[A(x) \wedge \forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)]$

was äquivalent ist zu (4) und (5):

(4) $\exists x\,[\forall y\,(A(y) \leftrightarrow x = y) \wedge B(x)]$

(5) $\exists^{!1} x\, A(x) \wedge \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

Dabei entspricht das erste Konjunkt von (3) dem Satz (2a) und stellt die *Existenz* des fraglichen Objektes sicher. Das zweite Konjunkt von (3) entspricht (2b) und garantiert die *Eindeutigkeit*. Das dritte Konjunkt von (3) schließlich entspricht (2c) und fordert, dass das fragliche Objekt eine bestimmte Eigenschaft besitzt. (2a) wird so auch als *Existenz*-, (2b) als *Eindeutigkeitsbedingung* bezeichnet.

- Russells Kennzeichnungstheorie behandelt nur Beschreibungen der Form *der/die/dasjenige* x*, das* φ *ist*, kann aber auch auf Determinatoren wie *beide* bzw. *keiner der beiden* angewandt werden. So ist der Satz (6) etwa von der Form (8) und Satz (7) von der Form (9):

(6) *Beide Autoren haben die Veröffentlichung erlebt*

(7) *Keiner der beiden Autoren hat die Veröffentlichung erlebt*

(8) $\exists^{!2} x\, A(x) \wedge \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

(9) $\exists^{!2} x\, A(x) \wedge \forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

3.3 Unvollständige Symbole

- Nach Russell sind definite Kennzeichnungen demnach Ausdrücke, die nicht—wie Eigennamen—unabhängig auf Objekte referieren, sondern nur im Kontext eines Satzes zu dessen Gesamtbedeutung beitragen (sog. *unvollständige Symbole*). Für die logische Notation definiter Kennzeichnungen führt Russell den *Jota-Operator* $\imath$ ein: $(\imath x)(A(x))$ ist zu verstehen als *dasjenige* x*, das (allein) die Eigenschaft* A *erfüllt*. Mit Hilfe dieser Notation kann (3) abgekürzt werden durch:

(10) $B[(\imath x)(A(x))]$

3.4 Konsequenzen von Russells Analyse

- Nach Russells Analyse können offenbar die grammatikalische und die logische Form eines Satzes (wie (1)) erheblich voneinander abweichen.
- Wenn P ein einfaches Prädikatsymbol und t ein Eigenname oder eine Kennzeichnung ist, dann gilt: Aus $P(t)$ folgt (logisch) $\exists x\, P(x)$.
- Aus *beliebigen* Formeln $\varphi(t)$ folgt aber nicht unbedingt $\exists x\, \varphi(x)$, falls es sich bei t um eine Kennzeichnung $(\imath x)(A(x))$ handelt.
- Ebenfalls gilt nicht im Allgemeinen $t = t$: $(\imath x)(A(x)) = (\imath x)(A(x))$ ist etwa *falsch*, wenn es nicht genau ein Objekt gibt, welches die durch $A(x)$ ausgedrückte Eigenschaft besitzt. Nach Russell ist

$$(\imath x)(A(x)) = (\imath x)(A(x))$$

zu analysieren als:

$$\exists x\,[\forall y\,(A(y) \leftrightarrow x = y) \wedge \exists z\,(\forall w\,(A(w) \leftrightarrow z = w) \wedge x = z)]$$

3.5 Skopus-Ambiguitäten

- Der Satz (1) kann aus drei Gründen falsch sein:

es gibt gegenwärtig keinen König von Frankreich *es gibt gegenwärtig nicht nur einen König von Frankreich*

es gibt zwar gegenwärtig genau einen König von Frankreich, aber der ist nicht kahlköpfig

- Russells Analyse von $\mathsf{B}[(\imath \mathsf{x})(\mathsf{A}(\mathsf{x}))]$ in Form von (2) ermöglicht nun, der Mehrdeutigkeit von $\neg\mathsf{B}[(\imath \mathsf{x})(\mathsf{A}(\mathsf{x}))]$ gerecht zu werden:

(11) $\neg\exists x\,[A(x) \land \forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \land B(x)]$

(12) $\exists x\,[A(x) \land \neg\forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \land B(x)]$

(13) $\exists x\,[A(x) \land \forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \land \neg B(x)]$

- Russell kann mit Lesart (11) erklären, weshalb der Satz

(14) *Der gegenwärtige König von Frankreich ist nicht kahlköpfig, weil es gegenwärtig gar keinen König von Frankreich gibt*

in der Regel als *wahr* erachtet wird.

Aufgaben

1 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen!

a) $\exists x\,[A(x) \land \forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \land B(x)] \vdash \exists x\,[\forall y\,(A(y) \leftrightarrow x = y) \land B(x)]$

b) $\exists x\,[\forall y\,(A(y) \leftrightarrow x = y) \land B(x)] \vdash \exists^{!1} x\, A(x) \land \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

c) $\exists^{!1} x\, A(x) \land \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \exists x\,[A(x) \land \forall y\,(A(y) \rightarrow x = y) \land B(x)]$

d) $\exists x\,\exists y\,(A(x) \land A(y) \land x \neq y)$, $\forall x\,\forall y\,\forall z\,[(A(x) \land A(y) \land A(z)) \rightarrow (x = y \lor x = z \lor y = z)] \vdash \exists x\,\exists y\,[A(x) \land A(y) \land x \neq y \land \forall z\,(A(z) \rightarrow (z = x \lor z = y))]$

e) $\exists x\,\exists y\,[A(x) \land A(y) \land x \neq y \land \forall z\,(A(z) \rightarrow (z = x \lor z = y))] \vdash \exists x\,\exists y\,(A(x) \land A(y) \land x \neq y) \land \forall x\,\forall y\,\forall z\,[(A(x) \land A(y) \land A(z)) \rightarrow (x = y \lor x = z \lor y = z)]$

4. Generalisierte Quantoren

4.1 Relationale Quantifikation

- Aristoteles fasst in seiner Syllogistik Quantoren *relational* auf und betrachtet Sätze von der Form QAB, wobei der Quantor Q eine *Relation* zwischen den Termen A und B ausdrückt. Nach Frege bezeichnen Quantoren (*einstellige*) Begriffe 2. Stufe; der *Begriff* des Allquantors wird etwa benannt durch: $\forall x\, \varphi(x)$. Frege sah zwar, dass die umgangssprachlich quantifizierenden Ausdrücke in der Regel *zweistellig* sind, glaubte aber, dass diese mit Hilfe des einstelligen Allquantors und den logischen Junktoren definierbar seien. Die *Theorie der generalisierten Quantoren* greift demgegenüber wieder die Idee der relationalen Quantifikation auf.
Die Theorie wurde ausgearbeitet von: Mostowski, Montague, Barwise & Cooper u.a..
(*Literatur:* Dag Westerståhl: „Quantifiers in Formal and Natural Languages" in: D. Gabbay & F. Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic. Vol. 4: Topics in the Philosophy of Language*, Dordrecht 1989, S. 1–131.)
- Viele umgangssprachliche Quantifikationen können im Rahmen von PL1 nicht ausgedrückt werden, so etwa: *mehr als die Hälfte aller As sind Bs*. Diese Aussage ist selbst dann nicht im Rahmen von PL1 ausdrückbar, wenn man versucht, einen zusätzlichen Quantor wie *mehr als die Hälfte aller (Gegenstände)* x (neben $\forall x$ und $\exists x$) heranzuziehen.
- Will man derartige Quantifikationen ausdrücken, ist zu beachten, dass es sich bei solchen umgangssprachlichen Quantifikationen in der Regel um *beschränkte* Quantifikationen der Form QAB handelt, in welchen A den Quantifikationsbereich bezeichnet, Q einen Determinator, der bestimmt, über welche Teilmenge von A quantifiziert wird, und B die Eigenschaft, welche den Mitgliedern der besagten Teilmenge zugesprochen werden soll. Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ stellen somit einen Spezialfall dar, insofern bei beiden der Quantifikationsbereich stets der gesamte Gegenstandsbereich ist, so dass hier dem A in QAB ein Prädikat wie $x = x$ oder *Ding* entspräche, welches auf jedes Objekt des Gegenstandsbereiches zutrifft.