Induktion

1. Induktive (bzw. rekursive) Definitionen

- Unter der Bezeichnung (*vollständige*) *Induktion* versteht man ein Beweisverfahren, mit welchem Sätze der Form $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ bewiesen werden. Das Beweisverfahren ist anwendbar, wenn das Prädikat $P(x)$ definiert ist mit Hilfe einer sog. *induktiven* bzw. *rekursiven Definition*. Solche Definitionen strukturieren die definierten Mengen in bestimmter Weise und das Beweisverfahren der Induktion macht von dieser Strukturierung Gebrauch.
- Im Falle von induktiven oder rekursiven Definitionen einer Menge werden zunächst die ‚einfachsten' Elemente der Menge spezifiziert und dann Regeln angegeben, wie weitere Elemente der Menge aus bereits vorhandenen ‚gebildet' werden können. So wurde beispielsweise die Menge der wohlgeformten Formeln rekursiv definiert.
- Ein weiteres Beispiel einer induktiven Definition ist die Folgende. Die Definition legt fest, was unter einer *wohlgeformten Formel der Aussagenlogik* (Wff_{AL}) zu verstehen ist (die Sprache der Aussagenlogik umfasse dabei eine unendliche Menge von Aussagenbuchstaben sowie die üblichen aussagenlogischen Symbole und Hilfszeichen):
  1. Jeder Aussagebuchstabe ist eine Wff_{AL}.
  2. Sind P und Q Wff_{AL}, so auch die Ausdrücke: $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ und $(P \leftrightarrow Q)$.
  3. Nur Ausdrücke, die durch (wiederholte) Anwendung der Regeln 1. und 2. ‚erzeugt' werden können, sind Wff_{AL}.

  Dabei nennt man die Beschreibung der ‚einfachsten' Elemente der definierten Menge (1.) *Basisklausel*. Die Regeln, welche erlauben, weitere Elemente aus vorhandenen zu bilden (2.), nennt man *Induktionsklausel*. Zudem gibt man eine *Ausschlussklausel* an, welche festlegt, dass *nur* Elemente, welche die Bedingungen (1.)–(2.) erfüllen, zur definierten Menge gehören (3.).

2. Beweise durch (vollständige) Induktion

- Dass alle Elemente einer induktiv definierten Menge eine Eigenschaft φ besitzen, kann mit Hilfe eines *Induktionsbeweises* gezeigt werden. Zunächst zeigt man im sog. *Induktionsanfang*, dass alle in der Basisklausel beschriebenen ‚einfachen' Elemente die Eigenschaft φ haben. Im sog. *Induktionsschritt* wird dann gezeigt, dass die in der Induktionsklausel genannten Regeln, wenn sie auf Objekte angewandt werden, die φ sind, nur zu Objekten führen können, welche auch die Eigenschaft φ besitzen. Da nach der Abschlussklausel alle Elemente der induktiv definierten Menge auf diese Weise ‚gebildet' werden, hat man somit für alle Elemente der Menge gezeigt, dass sie die Eigenschaft φ besitzen.
- Induktive Beweise werden häufig verwandt, um zu zeigen, dass eine Eigenschaft auf alle natürlichen Zahlen zutrifft. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kann dabei (etwas vereinfacht) induktiv wie folgt definiert werden:
  1. $0 \in \mathbb{N}$.
  2. Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
  3. Nur Objekte, die durch (wiederholte) Anwendung der Regeln 1. und 2. ‚erzeugt' werden können, sind Elemente von $\mathbb{N}$.

  Soll also ein Satz der Form $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow \varphi(x))$ durch vollständige Induktion nachgewiesen werden, ist zweierlei zu zeigen:

  (*i*) $\varphi(0)$.

  (*ii*) Wenn $\varphi(n)$, dann auch $\varphi(n+1)$.

  Im Falle von (*ii*) nimmt man also an, dass $\varphi(n)$ gilt (die sog. *Induktionsannahme*) und zeigt mit Hilfe dieser Annahme, dass $\varphi(n+1)$ gilt.

  Beispiel: Im Folgenden wird mit Hilfe der vollständigen Induktion gezeigt, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist:

  (*i*) Die Summe der ersten 0 natürlichen Zahlen ist 0 und dies ist soviel wie $0(0+1)/2\ \ (=0)$.

  (*ii*) Wir nehmen an, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist. Wir müssen zeigen, dass die Summe der ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen $(n + 1)((n + 1) + 1)/2$ ist (also gleich $(n + 1)(n + 2)/2$ ist):

Die Summe der ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen ist gleich $n + 1$ plus der Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Letztere ist nach Induktionsannahme gleich $n(n + 1)/2$. Also ist die Summe der ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen (da $n + 1 = 2(n + 1)/2$) gleich $(2(n + 1)/2) + (n(n + 1)/2)$. Letzteres aber ist identisch mit $(n + 1)(n + 2)/2$.

- Induktive Beweise werden im Folgenden eine zentrale Rolle spielen, da es mit ihrer Hilfe auch möglich ist, Aussagen über die (Elemente der induktiv definierten Menge aller) Wffs der Sprache von PL1 zu beweisen. Ein (triviales) Beispiel eines solchen Beweises ist das Folgende:

Beispiel: Im Folgenden wird mit Hilfe der vollständigen Induktion gezeigt, dass jede Wff_{AL} zumindest einen Aussagebuchstaben enthält:

(i) Die einfachen Wff_{AL} sind Ausdrücke, welche nur aus einem Aussagebuchstaben bestehen und somit auch einen solchen enthalten.

(ii) Wir nehmen an, dass P und Q Wff_{AL} sind, die zumindest einen Aussagebuchstaben enthalten. Nun enthält aber $\neg\mathsf{P}$ alle Aussagebuchstaben, die auch in P enthalten sind und $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ und $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$ enthalten alle Aussagebuchstaben, die auch in P und Q enthalten sind. Da nach Induktionsvoraussetzung aber P und Q zumindest einen Aussagebuchstaben enthalten, gilt dasselbe demnach auch für $\neg\mathsf{P}$, $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ und $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$.

- Die vollständige Induktion ist zu unterscheiden von sog. *induktiven Schlüssen*, welche auf der Basis endlich vieler Beobachtungen (wie z. B. „*a*, *b* und *c* sind weiße Schwäne“) eine allgemeine Schlussfolgerung ziehen (wie z. B. „Alle Schwäne sind weiß“). Im Gegensatz zur vollständigen Induktion sind solche Schlüsse nicht *logisch* gerechtfertigt in dem Sinne, dass es unmöglich ist, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Im Falle (korrekter) vollständiger Induktionen hingegen *ist* es unmöglich, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Im Falle der vollständigen Induktion ist es somit im Gegensatz zu induktiven Schlüssen durchaus möglich, eine allgemeine Schlussfolgerung (ggf. über unendlich viele Gegenstände) mit einem endlichen Beweis zu rechtfertigen.

Aufgaben

1 Beweisen bzw. definieren Sie induktiv Folgendes:

a) Eine Interpretation der Sprache der Aussagenlogik ist eine Funktion, die jedem Aussagebuchstaben genau einen der Wahrheitswerte WAHR oder FALSCH zuweist. Definieren Sie induktiv, wann eine beliebige Wff_{AL} wahr in einer Interpretation ist (im Sinne der üblichen Wahrheitstafeln).

b) Beweisen Sie induktiv (aufbauend auf *a*)), dass das *Bivalenzprinzip* in der Aussagenlogik gilt, d. h.: Jede Wff_{AL} ist in einer beliebigen Interpretation wahr oder falsch.

2 Lösen Sie zudem die Aufgaben **16.2**, **16.5**, **16.14**, **16.15**, **16.16**, **16.20**, **16.24**.

3. Exkurs: Grices Theorie der Implikaturen

3.1 Satzbedeutung und Sprecherbedeutung

- Wird in einem Gutachten hinsichtlich der philosophischen Fähigkeiten von Herrn Schmidt festgestellt

  (1) *Herr Schmidt hat eine schöne Handschrift*

  ist klar, dass der Gutachter zu verstehen geben will, dass er von den philosophischen Fähigkeiten von Herrn Schmidt nicht viel hält. Neben der wörtlichen Bedeutung des Satzes (dem Gesagten), der sog. *Satzbedeutung*, welche hier mit den Wahrheitsbedingungen des Satzes identifiziert werden kann, muss daher die *Sprecherbedeutung* von (1) unterschieden werden. Letztere besteht in dem, was der Sprecher mitzuteilen beabsichtigt (dem Gemeinten) (und betrifft im vorliegenden Fall nicht die Handschrift Herrn Schmidts sondern dessen philosophische Begabung). Mit der Theorie der Implikaturen soll zumindest teilweise erklärt werden, wie die Sprecherbedeutung aufgrund der Satzbedeutung (und des Äußerungskontextes) erschlossen werden kann. Daher ist Grices Theorie der Implikaturen von großem Interesse für eine Theorie der Verständigung.

3.2 Kooperationsprinzip und Konversationsmaximen

- **Kooperationsprinzip**
  Mache deinen Gesprächsbeitrag jeweils so, wie es von dem akzeptierten Zweck oder der akzeptierten Richtung des Gespräches, an dem du teilnimmst, gerade verlangt wird.

- **Maxime der Qualität**
  Versuche deinen Beitrag so zu machen, dass er wahr ist, insbesondere:
  (*i*) *Sage nichts, was du für falsch hältst.*
  (*ii*) *Sage nichts, wofür dir angemessene Gründe fehlen.*

- **Maxime der Quantität**
  (*i*) *Mache deinen Beitrag so informativ wie (für die gegebenen Gesprächszwecke) nötig.*
  (*ii*) *Mache deinen Beitrag nicht informativer als nötig.*

- **Maxime der Relevanz (Relation)**
  Sei relevant.

- **Maxime der Modalität**
  Sei klar, insbesondere:
  (*i*) *Vermeide Dunkelheit des Ausdrucks.*
  (*ii*) *Vermeide Mehrdeutigkeit.*
  (*iii*) *Fasse dich kurz (vermeide unnötige Weitschweifigkeit).*
  (*iv*) *Der Reihe nach.*

3.3 Konversationelle Implikaturen

- Konversationelle Implikaturen sind vom Sprecher beabsichtigte Schlussfolgerungen, die der Hörer aufgrund der Annahme zieht, dass der Sprecher das Kooperationsprinzip und die Konversationsmaximen beachtet (zumindest auf der Ebene des Gemeinten). Dabei können Implikaturen sowohl dann entstehen, wenn das vom Sprecher wörtlich Gesagte im Einklang mit Kooperationsprinzip und den Maximen steht (so implikatiert man mit (2) in der Regel (3))—in diesem Fall spricht man von *Standard-Implikaturen* oder *Beachtung* der Maximen. Aber auch, wenn das wörtlich Gesagte nicht im Einklang mit Kooperationsprinzip und Maximen steht (sog. *Verstöße*), nimmt man in der Regel an, was der Sprecher meint, sei verträglich mit Kooperationsprinzip und Maximen. So wird beispielsweise (4) in der Regel metaphorisch und nicht wörtlich aufgefasst werden:

  (2) *Einige ihrer Freunde waren da*

  (3) *Nicht alle ihrer Freunde waren da*

  (4) *Hans ist eine Maschine*

- Konversationelle Implikaturen unterscheiden sich zudem dadurch, ob sie stark vom Kontext abhängen (wie im Falle von (4))—hier spricht man von sog. *partikularisierten Implikaturen*—oder ob sie relativ kontextunabhängig sind—sog. *generalisierte Implikaturen* (wie im Falle von (2)). So kann mit (4) je nach Kontext Verschiedenes gemeint sein (etwa dass Hans fehlerfrei arbeitet oder auch dass Hans gefühlskalt ist).

3.4 Skalare Implikaturen

- Eine Skala ist eine Folge sprachlicher Ausdrücke $\langle e_1, e_2, e_3, ..., e_n\rangle$, die ihrer Informativität nach angeordnet sind, d. h.: Kommt in einem Satz etwa e_1 vor ($A[e_1]$), so folgen aus $A[e_1]$ die Sätze $A[e_2]$, $A[e_3]$ usw.
  Im Allgemeinen folgen aus einer Aussage $A[e_i]$ alle Aussagen $A[e_j]$ mit $j > i$.
- Beispiele für Skalen

$\langle e_1, e_2, e_3, ..., e_n\rangle$	⟨*schaffte X*, *versuchte X*, *wollte X*⟩
⟨*alle*, *die meisten*, *viele*, *einige*, *wenige*⟩	⟨*müssen*, *sollen*, *dürfen*⟩
⟨*und*, *oder*⟩	⟨*notwendigerweise p*, *p*, *möglicherweise p*⟩
⟨*n*, ... , *3*, *2*, *1*⟩	⟨*sicherlich p*, *wahrscheinlich p*, *womöglich p*⟩
⟨*exzellent*, *gut*⟩	⟨*lieben*, *mögen*⟩
⟨*heiß*, *warm*⟩	⟨*kalt*, *kühl*⟩
⟨*immer*, *meistens*, *manchmal*⟩	⟨*kein*, *nicht alle*⟩

- Auf der Grundlage der Skalen entstehen *skalare Implikaturen*. Diese gehören zu den sog. *generalisierten Quantitätsimplikaturen* (welche kontextunabhängig aufgrund der Maxime der Quantität ‚berechnet' werden können). Skalare Implikaturen ergeben sich wie folgt: Gegeben sei eine Skala $\langle e_1, e_2, e_3, ..., e_n\rangle$. Äußert ein Sprecher S nun einen Satz $A[e_j]$, implikatiert er für jedes $i < j$, dass er weiß, dass $\neg A[e_i]$ (oder zumindest, dass er nicht weiß, dass $A[e_i]$).

  Beispiel: Man betrachte die Skala ⟨*alle*, *die meisten*, *viele*, *einige*, *wenige*⟩ (bzw. $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$ mit $e_1 =$ *alle*, $e_2 =$ *die meisten*, $e_3 =$ *viele*, $e_4 =$ *einige*, $e_5 =$ *wenige*). Sei des weiteren $A[\ ]$: [ ] *Kinder gingen schwimmen*

  Äußert ein Sprecher S: [*Einige*] *Kinder gingen schwimmen* (d. h. $A[e_4]$) implikatiert S für jedes $i < 4$, dass er weiß, dass $\neg A[e_i]$—also: $\neg A[e_3]$, $\neg A[e_2]$ und $\neg A[e_1]$; bzw. ausführlich:

  (5) *Nicht* [*viele*] *Kinder gingen schwimmen* $\neg A[e_3]$

  (6) *Nicht* [*die meisten*] *Kinder gingen schwimmen* $\neg A[e_2]$

  (7) *Nicht* [*alle*] *Kinder gingen schwimmen* $\neg A[e_1]$

3.5 Literatur

Paul Grice, *Studies in the Way of Words*, Cambridge (MA) & London 1989. / Ders., „Logik und Konversation" in Georg Meggle (Hrsg.), *Handlung, Kommunikation, Bedeutung*, Frankfurt am Main 1993, S. 243 – 65.
Im selben Band finden sich auch einige andere Aufsätze von Grice in deutscher Übersetzung.

Vgl. zum Obigen:

T. Blume & C. Demmerling, *Grundprobleme der analytischen Sprachphilosophie*, Paderborn 1998, Kap. 5, (d).
Weitere Literatur zu Grice siehe dort, S. 289–91. Siehe insbesondere:

Andreas Kemmerling, „Implikatur" in Arnim von Stechow & Dieter Wunderlich (Hrsg.), *Semantik. Ein internationales Handbuch der zeitgenössischen Forschung*, Berlin & New York 1991, S. 319 – 33.