Gödels Unvollständigkeitssätze und weitere limitative Theoreme

1. Beispiele limitativer Theoreme

- Zwei wichtige Konsequenzen aus dem Vollständigkeitstheorem sind das Kompaktheitstheorem für die Prädikatenlogik und das Löwenheim-Skolem-Theorem.
- Kompaktheitstheorem für PL1. *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L. Wenn jede endliche Teilmenge von $\mathcal{T}$ wahr in einer Interpretation ist, dann gibt es auch eine Interpretation, die jeden Satz aus $\mathcal{T}$ wahr macht.*

  Beweis: Gäbe es keine Interpretation, die alle Sätze aus $\mathcal{T}$ wahr macht, gäbe es (aufgrund des Vollständigkeitssatzes) einen Beweis von $\perp$ mit endlich vielen Prämissen aus $\mathcal{T}$. Aufgrund des Korrektheitssatzes gäbe es dann auch keine Interpretation, die alle Sätze der endlichen Prämissenmenge wahr macht.
- Löwenheim-Skolem-Theorem. *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen einer prädikatenlogischen Sprache L. Gibt es eine Interpretation, welche jeden Satz aus $\mathcal{T}$ wahr macht, dann gibt es auch eine Interpretation mit abzählbar unendlichem oder endlichem Gegenstandsbereich, die jeden Satz aus $\mathcal{T}$ wahr macht.*

2. Gödels Unvollständigkeitssätze

- Gödels Unvollständigkeitstheorem. *Die Peano-Arithmetik PA ist nicht formal vollständig.* (Dabei heißt eine Theorie $\mathcal{T}$ *formal vollständig* gdw. für jeden Satz S gilt, dass $\mathcal{T} \vdash \mathsf{S}$ oder $\mathcal{T} \vdash \neg\mathsf{S}$).

2.1 Gödelnummern und Arithmetisierung

- Gödels erstes Unvollständigkeitstheorem zeigt, dass in formalen Systemen, die ein Mindestmaß an Arithmetik beinhalten, bestimmte Sätze

weder bewiesen noch widerlegt werden können. Solche Sätze werden *unentscheidbar* im Rahmen der zugrunde gelegten Theorien genannt, und Theorien, die bestimmte Sätze nicht entscheiden, bezeichnet man als *unvollständig*.
- Das wohl berühmteste Beispiel eines solchen unentscheidbaren Satzes ist eine Variation der Lügner-Paradoxie, die von sich behauptet, sie sei nicht beweisbar. Auf den ersten Blick mag es unmöglich erscheinen, einen solchen Satz zu formulieren in einer Sprache, die einer Theorie zugrunde liegt, von der man nur verlangt, dass sie einen bestimmten Teil an Arithmetik beinhaltet. Immerhin ist es zur Formulierung des besagten Satzes notwendig, über ein Beweisbarkeitsprädikat zu verfügen ebenso wie über eine Methode, selbstreferentielle Sätze bilden zu können, was das arithmetische Vokabular nicht herzugeben scheint.
- Gödel hat nun aber gezeigt, dass dem doch so ist. Dies gelang ihm durch die heute so genannte *Gödelisierung*, eine Zuordnung von Zahlen (so genannten *Gödelnummern*) zu Ausdrücken. Somit kann mit Sätzen der Sprache der Arithmetik über Ausdrücke der Sprache der Arithmetik gesprochen werden, indem man über ihre Gödelnummern spricht.
- Neben den sprachlichen Ausdrücken, die durch Gödelnummern repräsentiert werden, können auch Eigenschaften (Mengen) von solchen Ausdrücken durch Eigenschaften (Mengen) der entsprechenden Gödelnummern repräsentiert werden, wobei diese Mengen wiederum durch Formeln der Sprache der Arithmetik ausgedrückt werden.
- Auf diese Weise ist es möglich, metamathematische Aussagen zu *arithmetisieren*, d. h. Aussagen über ein formales System in äquivalente zahlentheoretische Aussagen zu übersetzen, die im formalen System selbst ausgedrückt werden können (wenn es denn über ein hinreichendes Maß an Arithmetik verfügt).
- Gödel gelang es so zu zeigen, dass auch die Beweisrelation einer Theorie $\mathcal{T}$ (die über das besagte Mindestmaß an Arithmetik verfügt) in der zugrunde gelegten Sprache durch eine Formel $\mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ derart definiert werden kann, dass Folgendes gilt:[1]

1 Im Allgemeinen ist eine Menge (bzw. Eigenschaft) natürlicher Zahlen Δ definierbar in einer (in der Sprache der Arithmetik formulierten) Theorie $\mathcal{T}$, wenn es eine Formel $\mathsf{D}(\mathsf{x})$ gibt, so dass für alle na-

(1) Wenn n ein Beweis von m in $\mathcal{T}$ ist, dann gilt: $\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{n}, \mathsf{m})$.

(2) Wenn n kein Beweis von m in $\mathcal{T}$ ist, dann: $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{n}, \mathsf{m})$.

2.2 Diagonalisierung und Selbstreferenz

- Um mit $\mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ einen Satz zu formulieren, der von sich selbst besagt, er sei nicht beweisbar, ist es zudem erforderlich, selbstreferentielle Sätze im Rahmen der zugrunde gelegten Sprache formulieren zu können. Dies erreicht Gödel mit Hilfe der so genannten *Diagonalisierungsfunktion*.
- Grob gesprochen ist dabei die Diagonalisierung eines Ausdrucks α (in dem die freie Variable x vorkommt) das Ergebnis der Ersetzung einer Bezeichnung von α für jedes freie Vorkommnis von x in α. So ist beispielsweise (4) das Ergebnis der Diagonalisierung von (3):[2]

  (3) x ist lang

  (4) ‚x ist lang' ist lang

- Wie mit Hilfe der Diagonalisierungsfunktion selbstreferentielle Sätze gebildet werden können, soll durch das Folgende verdeutlicht werden:

  (5) Die Diagonalisierung von x ist lang

  (6) Die Diagonalisierung von
  „Die Diagonalisierung von x ist lang" ist lang

  Satz (6) behauptet, dass die Diagonalisierung von (5) lang ist. Da Satz (6) aber gerade das Ergebnis der Diagonalisierung von (5) *ist*, behauptet (6) somit *von sich selbst*, lang zu sein.

- Ähnlich wie die Beweisrelation definierbar in einer hinreichend starken Theorie ist, kann auch die Diagonalisierungsfunktion in einer solchen Theorie repräsentiert werden.[3]

türlichen Zahlen n gilt: Wenn $n \in \Delta$, dann $\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{D}(\mathsf{n})$, und wenn $n \notin \Delta$, dann $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathsf{D}(\mathsf{n})$. Entsprechend ist eine Menge von n-Tupeln (bzw. eine n-stellige Relation) von natürlichen Zahlen Γ definierbar in einer solchen Theorie $\mathcal{T}$, wenn es eine Formel $\mathsf{G}(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n)$ gibt, so dass für alle Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ gilt: Wenn $\langle k_1, \ldots, k_n\rangle \in \Gamma$, dann $\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{G}(\mathsf{k}_1, \ldots, \mathsf{k}_n)$, und wenn $\langle k_1, \ldots, k_n\rangle \notin \Gamma$, dann $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathsf{G}(\mathsf{k}_1, \ldots, \mathsf{k}_n)$.

2 Dieses Beispiel wurde Smullyan (1994), S. 3–4, entnommen.

3 Eine n-stellige Funktion f heißt dabei *repräsentierbar* in einer (in der Sprache der Arithmetik formulierten) Theorie $\mathcal{T}$, wenn es eine $n+1$-stellige Formel $\mathsf{F}(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n, \mathsf{x}_{n+1})$ gibt, so dass für alle Zahlen $k_1, \ldots, k_n, m$ gilt: Wenn es der Fall ist, dass $f(k_1, \ldots, k_n) = m$, dann gilt:
$$\vdash_{\mathcal{T}} \forall \mathsf{x}_{n+1} \big(\mathsf{F}(\mathsf{k}_1, \ldots, \mathsf{k}_n, \mathsf{x}_{n+1}) \leftrightarrow \mathsf{x}_{n+1} = \mathsf{m}\big).$$

- Mit Hilfe der Diagonalisierung kann nun für jede Eigenschaft, die durch eine arithmetische Formel $\phi(\mathsf{x})$ ausgedrückt werden kann (wie beispielsweise die Eigenschaft der Beweisbarkeit), ein Satz gebildet werden, der gewissermaßen von sich selbst behauptet, er habe die fragliche Eigenschaft ϕ. Dieses als *Diagonalisierungslemma* oder auch *Fixpunktsatz* bekannte Ergebnis ist zentral für den Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem:
- DIAGONALISIERUNGSLEMMA. *Es sei $\mathcal{T}$ eine Theorie, in der die Diagonalisierungsfunktion repräsentiert werden kann. Dann gilt für jede Formel $\phi(\mathsf{x})$, die in der Sprache von $\mathcal{T}$ formulierbar ist und nur die freie Variable* x *enthält, dass es einen Satz σ gibt, so dass Folgendes erfüllt ist:*[4]
$$\vdash_{\mathcal{T}} \phi(\ulcorner\sigma\urcorner) \leftrightarrow \sigma$$

2.3 Gödels erstes Unvollständigkeitstheorem (*G1*)

- Wählt man in diesem Lemma als $\phi(\mathsf{x})$ die Formel $\neg\exists \mathsf{z}\, \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \mathsf{x})$ (welche die Eigenschaft x *ist nicht beweisbar* ausdrückt), ergibt sich ein so genannter Gödelsatz $\gamma_{\mathcal{T}}$ für die Theorie $\mathcal{T}$, für den gilt:

  (7) $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\exists \mathsf{z}\, \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner) \leftrightarrow \gamma_{\mathcal{T}}$

  $\gamma_{\mathcal{T}}$ besitzt demnach dieselben Wahrheitsbedingungen wie der Satz $\neg\exists \mathsf{z}\, \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$ und ‚besagt' somit, dass es keinen Beweis für $\gamma_{\mathcal{T}}$ gibt. $\gamma_{\mathcal{T}}$ behauptet damit gewissermaßen von sich selbst, nicht beweisbar zu sein.

- Nimmt man nun an, es gäbe in $\mathcal{T}$ einen Beweis von $\gamma_{\mathcal{T}}$, dann ergäbe sich aufgrund der Beweisbarkeit des zuletzt erwähnten Bikonditionals (7), dass $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\exists \mathsf{z}\, \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$. Aufgrund der obigen Bedingung (1) gilt im Falle der Beweisbarkeit von $\gamma_{\mathcal{T}}$ aber auch, dass $\vdash_{\mathcal{T}} \exists \mathsf{z}\, \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$. Somit wäre $\mathcal{T}$ inkonsistent. Setzt man aber die Konsistenz von $\mathcal{T}$ voraus, ergibt sich die Negation der Annahme und d. h. $\nvdash_{\mathcal{T}} \gamma_{\mathcal{T}}$. Dies ist im Wesentlichen das Ergebnis von Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem:

4 $\ulcorner\alpha\urcorner$ sei dabei das Numeral der Gödelnummer des Ausdrucks α.

- GÖDELS ERSTES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM (G1). *Es sei $\mathcal{T}$ eine rekursiv axiomatisierbare Theorie, die ein Mindestmaß an Arithmetik enthält* (*und so etwa eine Erweiterung der so genannten Robinson-Arithmetik* Q *ist*). *Dann gilt:*

  (*i*) *Wenn $\mathcal{T}$ konsistent ist, dann gilt* $\nvdash_{\mathcal{T}} \gamma_{\mathcal{T}}$.

  (*ii*) *Wenn $\mathcal{T}$* zudem *ω-konsistent ist, dann gilt* $\nvdash_{\mathcal{T}} \neg\gamma_{\mathcal{T}}$.[5]

2.4 Gödels zweites Unvollständigkeitstheorem (G2)

- Das Konsequens des Konditionals (*i*) kann nun aber im Rahmen von $\mathcal{T}$ durch $\neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$ ausgedrückt werden und das Antezedens etwa durch den Satz $\neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner 0 = 1\urcorner)$; dieser Satz soll im Folgenden durch „$\mathsf{kons}(\mathcal{T})$" abgekürzt werden. Da nun auch das Argument, das zu G1 führte, in $\mathcal{T}$ formalisiert werden kann, gilt auch

  (8) $\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{kons}(\mathcal{T}) \rightarrow \neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$[6]

  und daraus ergibt sich Gödels zweites Unvollständigkeitstheorem:

- GÖDELS ZWEITES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM (G2). *Es sei $\mathcal{T}$ eine Theorie, die die Bedingungen von* G1 *erfüllt. Ist $\mathcal{T}$ konsistent, dann gilt:*[7]

  $$\nvdash_{\mathcal{T}} \mathsf{kons}(\mathcal{T})$$

  Wäre nämlich $\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{kons}(\mathcal{T})$ der Fall, dann ergäbe sich aufgrund von (8), dass auch $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner\gamma_{\mathcal{T}}\urcorner)$ gilt und somit aufgrund von (7) auch $\vdash_{\mathcal{T}} \gamma_{\mathcal{T}}$, was im Widerspruch zu G1 steht.

---

5 Eine Theorie ist dabei ω-konsistent genau dann, wenn für jede wohlgeformte Formel $\phi(\mathsf{x})$ der zugrunde gelegten Sprache, in der nur x als freie Variable vorkommt, Folgendes gilt: Wenn für jede natürliche Zahl *n* $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\phi(\mathsf{n})$ gilt, dann ist es nicht der Fall, dass $\vdash_{\mathcal{T}} \exists \mathsf{x}\ \phi(\mathsf{x})$ (dabei wird vorausgesetzt, dass es sich bei der zugrunde gelegten Sprache um eine Sprache handelt, die arithmetische Sachverhalte ausdrücken kann und insbesondere über die Individuenkonstante 0 sowie das Symbol für die Nachfolgerfunktion verfügt.) Die Annahme der ω-Konsistenz kann dabei abgeschwächt werden zur Annahme der bloßen Konsistenz, wenn auf einen etwas komplexeren unentscheidbaren Satz zurückgegriffen wird. Dies wurde 1936 von J. B. Rosser bewiesen; der besagte komplexere unentscheidbare Satz wird daher gelegentlich auch als *Rossersatz* für $\mathcal{T}$ bezeichnet.

6 In $\mathcal{T}$ sind aber nicht nur „$\mathsf{kons}(\mathcal{T}) \rightarrow \neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner g_{\mathcal{T}}\urcorner)$" und damit „$\mathsf{kons}(\mathcal{T}) \rightarrow \gamma_{\mathcal{T}}$" herleitbar, sondern auch die Umkehrungen „$\neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner g_{\mathcal{T}}\urcorner) \rightarrow \mathsf{kons}(\mathcal{T})$" bzw. „$\gamma_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathsf{kons}(\mathcal{T})$". Damit sind im Rahmen von $\mathcal{T}$ die Behauptungen „$\mathsf{kons}(\mathcal{T})$" und $\gamma_{\mathcal{T}}$ *äquivalent*.

7 Eine weitere wichtige Folgerung, die gelegentlich ebenfalls als Ergebnis von G2 angeführt wird, besagt: Die Formalisierung der Behauptung von G2, *Wenn $\mathcal{T}$ konsistent ist, so kann dies im Rahmen von $\mathcal{T}$ nicht bewiesen werden*, kann in $\mathcal{T}$ hergeleitet werden (siehe Rautenberg 1996, S. 215):

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{kons}(\mathcal{T}) \rightarrow \neg\exists \mathsf{z}\ \mathsf{Bew}_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}, \ulcorner \mathsf{kons}(\mathcal{T})\urcorner)$$

3. Weiterführende Literatur

3.1 Zur Einführung empfohlen

Ernest NAGEL & James R. NEWMAN, *Gödel's Proof*, London & New York: Routledge 1958.

Raymond SMULLYAN, „Gödel's Incompleteness Theorems", in: Lou GOBLE (Hrsg.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Malden (MA) & Oxford: Blackwell 2001, S. 72–89.

3.2 Philosophische Überlegungen zu Gödels Unvollständigkeitstheoremen

Michael DETLEFEN, „On Interpreting Gödel's Second Theorem", *Journal of Philosophical Logic* 8, Nr. 3 (1979), S. 297–313. Wiederabgedruckt in: Stuart G. SHANKER, *Gödel's Theorem in Focus*, London & New York: Routledge 1989, S. 131–154.

Hartry FIELD, „Which Undecidable Mathematical Sentences have Determinate Truth Values?", in: H. Garth DALES & Gianluigi OLIVERI (Hrsg.), *Truth in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press 1998, S. 291–310. Wiederabgedruckt in: Hartry FIELD, *Truth and the Absence of Fact*, Oxford: Oxford University Press 2001, S. 332–360.

Torkel FRANZÉN, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Wellesley (MA): A K Peters 2005.

Haim GAIFMAN, „What Gödel's Incompleteness Result Does and Does Not Show", *The Journal of Philosophy* 97, S. 462–70.

Kurt GÖDEL, „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", in: Kurt GÖDEL, *Collected Works. Unpublished Essays and Lectures* (Vol. III), hrsg. von S. Feferman u.a., Oxford & New York: Oxford University Press 1995, S. 304–323.

J. R. LUCAS, „Minds, Machines and Gödel", *Philosophy* 36, S. 112–127.

Graham PRIEST, „Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem", in: Max KÖLBEL & Bernhard WEISS (Hrsg.), *Wittgenstein's Lasting Significance*, London & New York: Routledge 2004, S. 206–225.

Michael D. RESNIK, „On the Philosophical Significance of Consistency Proofs", *Journal of Philosophical Logic* 3, Nr 12 (1974), S. 133–147. Wiederabgedruckt in: Stuart G. SHANKER, *Gödel's Theorem in Focus*, London & New York: Routledge 1989, S. 115–130.

Stuart G. SHANKER, *Gödel's Theorem in Focus*, London & New York: Routledge 1989.

3.3 Technische Darstellungen von Gödels Theoremen

Martin GOLDSTERN & Haim JUDAH, *The Incompleteness Phenomenon*, Wellesley (MA): A K Peters 1995.

Sergio GALVAN, *Einführung in die Unvollständigkeitstheoreme*, Paderborn: Mentis 2006.

Peter SMITH, *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge: Cambridge University Press 2007.

Raymond SMULLYAN, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford: Oxford University Press 1992.

3.4 Einführungen in die mathematische Logik unter Berücksichtigung der Gödel'schen Theoreme

George S. BOOLOS, John P. BURGESS & Richard C. JEFFREY, *Computability and Logic*, 4. Aufl., Cambridge: Cambridge University Press 2002.

René CORI & Daniel LASCAR, *Mathematical Logic*, Bd. II, Oxford: Oxford University Press 2001.

Moshé MACHOVER, *Set Theory, Logic and their Limitations*, Cambridge: Cambridge University Press 1996.

Elliott MENDELSON, *Introduction to Mathematical Logic*, 4. Aufl., London u. a.: Chapman & Hall 1997.

Wolfgang RAUTENBERG, *Einführung in die Mathematische Logik*, Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg 1996.

Joseph R. SHOENFIELD, *Mathematical Logic*, Wiederabdruck, Natick (MA): Association for Symbolic Logic/A K Peters 2001.

3.5 Zu Gödels Leben und Werk

John W. DAWSON JR., *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*, Wellesley (MA): A K Peters 1997. Ebenfalls erschienen auf Deutsch:

John W. DAWSON JR., *Kurt Gödel: Leben und Werk*, Wien & New York: Springer 1999.

Jaakko HINTIKKA, *On Gödel*, Belmont (CA): Wadsworth 2000.

Hao WANG, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge (MA) & London: MIT Press 1987.

Hao WANG, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge (MA) & London: MIT Press 1996.