es gibt gegenwärtig nicht nur einen König von Frankreich

es gibt zwar gegenwärtig genau einen König von Frankreich, aber der ist nicht kahlköpfig

- Russells Analyse von $\mathsf{B}[(\imath \mathsf{x})(\mathsf{A}(\mathsf{x}))]$ in Form von (2) ermöglicht nun, der Mehrdeutigkeit von $\neg\mathsf{B}[(\imath \mathsf{x})(\mathsf{A}(\mathsf{x}))]$ gerecht zu werden:

(11) $\neg\exists x\, [A(x) \wedge \forall y\, (A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)]$

(12) $\exists x\, [A(x) \wedge \neg\forall y\, (A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)]$

(13) $\exists x\, [A(x) \wedge \forall y\, (A(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg B(x)]$

- Russell kann mit Lesart (11) erklären, weshalb der Satz

(14) *Der gegenwärtige König von Frankreich ist nicht kahlköpfig, weil es gegenwärtig gar keinen König von Frankreich gibt*

in der Regel als *wahr* erachtet wird.

Aufgaben

1 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen!

a) $\exists x\, [A(x) \wedge \forall y\, (A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)] \ \vdash$
$\exists x\, [\forall y\, (A(y) \leftrightarrow x = y) \wedge B(x)]$

b) $\exists x\, [\forall y\, (A(y) \leftrightarrow x = y) \wedge B(x)] \ \vdash \ \exists^{!1} x\, A(x) \wedge \forall x\, (A(x) \rightarrow B(x))$

c) $\exists^{!1} x\, A(x) \wedge \forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \ \vdash$
$\exists x\, [A(x) \wedge \forall y\, (A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)]$

d) $\exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$,
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)] \ \vdash$
$\exists x\, \exists y\, [A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\, (A(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$

e) $\exists x\, \exists y\, [A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\, (A(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))] \ \vdash$
$\exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y) \wedge$
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)]$

4. Generalisierte Quantoren

4.1 Relationale Quantifikation

- ARISTOTELES fasst in seiner Syllogistik Quantoren *relational* auf und betrachtet Sätze von der Form *QAB*, wobei der Quantor *Q* eine *Relation* zwischen den Termen *A* und *B* ausdrückt. Nach Frege bezeichnen Quantoren (*einstellige*) Begriffe 2. Stufe; der *Begriff* des Allquantors wird etwa benannt durch: $\forall x\, \varphi(x)$. Frege sah zwar, dass die umgangssprachlich quantifizierenden Ausdrücke in der Regel *zweistellig* sind, glaubte aber, dass diese mit Hilfe des einstelligen Allquantors und den logischen Junktoren definierbar seien. Die *Theorie der generalisierten Quantoren* greift demgegenüber wieder die Idee der relationalen Quantifikation auf.
Die Theorie wurde ausgearbeitet von: MOSTOWSKI, MONTAGUE, BARWISE & COOPER u.a..
(*Literatur:* Dag WESTERSTÅHL: „Quantifiers in Formal and Natural Languages“ in: D. GABBAY & F. GUENTHNER (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic. Vol. 4: Topics in the Philosophy of Language*, Dordrecht 1989, S. 1–131.)

- Viele umgangssprachliche Quantifikationen können im Rahmen von PL1 nicht ausgedrückt werden, so etwa: *mehr als die Hälfte aller As sind Bs*. Diese Aussage ist selbst dann nicht im Rahmen von PL1 ausdrückbar, wenn man versucht, einen zusätzlichen Quantor wie *mehr als die Hälfte aller* (*Gegenstände*) x (neben $\forall x$ und $\exists x$) heranzuziehen.

- Will man derartige Quantifikationen ausdrücken, ist zu beachten, dass es sich bei solchen umgangssprachlichen Quantifikationen in der Regel um *beschränkte* Quantifikationen der Form *QAB* handelt, in welchen *A* den Quantifikationsbereich bezeichnet, *Q* einen Determinator, der bestimmt, über welche Teilmenge von *A* quantifiziert wird, und *B* die Eigenschaft, welche den Mitgliedern der besagten Teilmenge zugesprochen werden soll. Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ stellen somit einen Spezialfall dar, insofern bei beiden der Quantifikationsbereich stets der gesamte Gegenstandsbereich ist, so dass hier dem *A* in *QAB* ein Prädikat wie $x = x$ oder *Ding* entspräche, welches auf jedes Objekt des Gegenstandsbereiches zutrifft.

- In der folgenden Tabelle wird der besondere Fall der Verwendung von Determinatoren (in Sätzen der Form $Q\,Ding(e)\,B$) der allgemeinen Verwendungsweise von Determinatoren (in Sätzen der Form $Q\,A\,B$) gegenübergestellt, welche nicht auf ein bestimmtes A beschränkt ist.

Determinator	**Besondere Form**	**Allgemeine Form**
jede(-r/-s)	*jedes Ding*	*jeder Mensch, jede Zahl, ...*
einige	*einige Dinge*	*einige Menschen, einige Zahlen, ...*
kein(-e/-er)	*kein Ding*	*kein Mensch, keine Zahl, ...*
genau zwei	*genau zwei Dinge*	*genau zwei Menschen, genau zwei Zahlen, ...*
die meisten	*die meisten Dinge*	*die meisten Menschen, die meisten Zahlen, ...*

Im Falle vieler Determinatoren ist es möglich, die allgemeine Form mit Hilfe der besonderen Form und zusätzlichen wahrheitsfunktionalen Junktoren darzustellen. *Alle*, *einige*, *kein* und die numerischen Quantoren sind in diesem Sinne *reduzierbar*:

Jedes A (ist) B $\Leftrightarrow$ *Jedes Ding ist, wenn es A ist, auch B*

Genau zwei A (sind) B $\Leftrightarrow$ *Genau zwei Dinge sind A und B*

- Um Sätze mit nicht reduzierbaren Determinatoren ausdrücken zu können, ist es nötig, die Syntax von PL1 um eine neue Form quantifizierter Sätze zu erweitern. Zu diesem Zweck erweitern wir zunächst das Vokabular der Sprache von PL1 um *Determinatorenausdrücke* Q wie „Diemeisten“ usw. Die Definition der *wohlgeformten Formel* (Wff) wird erweitert um eine entsprechende Bedingung:

Sind A *und* B *wffs, ist* ν *eine Variable und* Q *ein Determinatorenausdruck, so ist* Q ν (A, B) *eine Wff. Jedes Vorkommnis von* ν *in* Q ν (A, B) *ist dabei gebunden.*

- So wäre etwa die Formel „Diemeisten x (A, B)“ eine Wff. Die spezielle Verwendungsform des Determinators in *die meisten Dinge sind B* kann nun ausgedrückt werden durch: Diemeisten x (x = x, B). Formeln der Art Q x (x = x, S) können abgekürzt werden durch Q x (S).

- Als Bedeutungen werden Determinatorenausdrücken stets *Funktionen* zugewiesen. Dem Determinatorenausdruck „mehr als die Hälfte“ wird so etwa in einer Interpretation M mit Gegenstandsbereich D die folgende Bedeutung zugeordnet:

mehr als die $\text{Hälfte}^M(A) = \{X \subseteq D \mid |X \cap A| > |A - X|\}$

Anmerkung: „$|X|$“ bezeichnet dabei die *Mächtigkeit* (bzw. die Anzahl der Elemente) der Menge X.

- Im Falle von einstelligen Prädikatsymbolen A und B sind Sätze der Form Q ν (A, B) wahr gdw.: $\mathsf{B}^M \in \mathsf{Q}^M(\mathsf{A}^M)$

Anmerkung: Die Wahrheitsbedingungen von Sätzen der Form Q ν (A, B), in welchen es sich bei A und/oder B um *beliebige* Formeln handelt, in denen nur ν frei vorkommt, können ganz ähnlich angegeben werden.

- Die reduzierbaren Determinatoren können auch als primitive Ausdrücke eingeführt werden und müssten so nicht indirekt durch $\forall$ und $\exists$ und weitere aussagenlogische Junktoren ausgedrückt werden. Dabei sei M wiederum eine Interpretation mit Gegenstandsbereich D:

  (*i*) $\mathsf{Ding}^M = D$
  (*ii*) $\mathsf{Einige}^M(A) = \{X \subseteq D \mid A \cap X \neq \varnothing\}$
  (*iii*) $\mathsf{Jedes}^M(A) = \{X \subseteq D \mid A \subseteq X\}$
  (*iv*) $\mathsf{Kein}^M(A) = \{X \subseteq D \mid A \cap X = \varnothing\}$
  (*v*) $\mathsf{n}^M(A) = \{X \subseteq D \mid |A \cap X| \geq n\}$
  (*vi*) $!\mathsf{n}^M(A) = \{X \subseteq D \mid |A \cap X| = n\}$
  (*vii*) $\mathsf{Die\ n}^M(A) = \mathsf{jedes}^M(A)$, falls $|A| = n$, sonst undefiniert.
  (*viii*) $\mathsf{Beide}^M(A) = \mathsf{die\ 2}^M(A)$
  (*ix*) $\mathsf{Keines\ von\ beiden}^M(A) = \mathsf{kein}^M(A)$, falls $|A| = 2$, sonst undefiniert.

- Die Theorie der generalisierten Quantoren erlaubt, die logische Form von Sätzen stärker deren grammatikalischer Form anzunähern als dies im Rahmen von PL möglich ist. Die folgenden Beispielsätze bestehen jeweils aus der Verknüpfung einer Nominal- mit einer Verbalphrase. Dennoch unterscheidet sich ihre logische Form grundlegend:

Hans		$\mathsf{K(h)}$
Jemand		$\exists \mathsf{x}\, \mathsf{K(x)}$
Jeder Mann		$\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{M(x)} \to \mathsf{K(x)})$
Der geg. König v. Frankreich	*ist/sind kahlköpfig*	$\exists \mathsf{x}\, (\mathsf{F(x)} \land \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{F(y)} \to \mathsf{x} = \mathsf{y}) \land \mathsf{K(x)})$
Die meisten Männer		—

- Mit der Hilfe generalisierter Quantoren kann demgegenüber jeder der obigen Sätze als Satz von der Form QAB dargestellt werden—selbst Sätze wie *Hans ist kahlköpfig*. Zu diesem Zweck wird die Nominalphrase *Hans* aufgefasst als generalisierter Quantor. Der Satz besitzt dann folgende Form: das 1 $\mathsf{x}\, (\mathsf{x} = \mathsf{h}, \mathsf{K(x)})$.
- Dem liegt die Idee Richard Montagues zugrunde, etwa im Rahmen des Satzes *Hans ist kahlköpfig* die Nominalphrase *Hans* zu interpretieren durch die Gesamtheit der Eigenschaften, die Hans besitzt. Diese Idee geht wiederum auf das sog. Leibniz-Prinzip zurück, demzufolge ein Objekt eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaften, die es besitzt: *x und y sind genau dann identisch, wenn sie in allen ihren Eigenschaften übereinstimmen.*
- Entsprechend wurden (wie oben gezeigt) im Rahmen der Theorie der generalisierten Quantoren auch Nominalphrasen wie *jedes Kind* oder *einige Kinder* Mengen von Eigenschaften zugeordnet (wobei Eigenschaften der Einfachheit halber mit den Mengen von Objekten identifiziert werden, auf welche sie zutreffen). Somit besitzen unterschiedliche Sätze von der Form QAB dieselbe logische Form $\mathsf{Q}\, \mathsf{x}\, (\mathsf{A}, \mathsf{B})$:

Hans		das 1 $\mathsf{x}\, (\mathsf{x} = \mathsf{h}, \mathsf{K(x)})$
Jemand		einige $\mathsf{x}\, (\mathsf{Ding(x)}, \mathsf{K(x)})$
Jeder Mann		jedes $\mathsf{x}\, (\mathsf{M(x)}, \mathsf{K(x)})$
Der geg. König v. Frankreich	*ist/sind kahlköpfig*	das 1 $\mathsf{x}\, (\mathsf{F(x)}, \mathsf{K(x)})$
Die meisten Männer		die meisten $\mathsf{x}\, (\mathsf{M(x)}, \mathsf{K(x)})$

- Einige Determinatoren haben gemeinsame Eigenschaften, durch welche sie dieselbe Stelle in bestimmten gültigen Schlüssen einnehmen können. Zu den wichtigen Eigenschaften zählen etwa die *Monotonie* und die *Persistenz*.
- Ein Determinator heißt *aufwärtsmonoton* genau dann, wenn für alle A, B und B′ das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\, \mathsf{x}\, (\mathsf{A(x)}, \mathsf{B(x)}) \\
\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{B(x)} \to \mathsf{B'(x)}) \\
\hline
\mathsf{Q}\, \mathsf{x}\, (\mathsf{A(x)}, \mathsf{B'(x)})
\end{array}$$

  Ob ein Determinator aufwärtsmonoton ist, kann mit dem folgenden Test festgestellt werden: Q ist aufwärtsmonoton gdw. das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind alt und vom Einsturz bedroht} \\
\hline
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind alt}
\end{array}$$

- Ein Determinator heißt *abwärtsmonoton* genau dann, wenn für alle A, B und B′ das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\, \mathsf{x}\, (\mathsf{A(x)}, \mathsf{B'(x)}) \\
\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{B(x)} \to \mathsf{B'(x)}) \\
\hline
\mathsf{Q}\, \mathsf{x}\, (\mathsf{A(x)}, \mathsf{B(x)})
\end{array}$$

  Ob ein Determinator abwärtsmonoton ist, kann mit dem folgenden Test festgestellt werden: Q ist abwärtsmonoton gdw. das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind alt} \\
\hline
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind alt und vom Einsturz bedroht}
\end{array}$$

- Ein Determinator heißt *persistent* genau dann, wenn für alle A, A′ und B das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q\,x\,(A(x), B(x))} \\
\forall \mathsf{x\,(A(x) \rightarrow A'(x))} \\
\hline
\mathsf{Q\,x\,(A'(x), B(x))}
\end{array}$$

  Ob ein Determinator persistent ist, kann mit dem folgenden Test festgestellt werden: Q ist persistent gdw. das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\ \textit{alte(-n/-s) Gebäude ist/sind vom Einsturz bedroht} \\
\hline
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind vom Einsturz bedroht}
\end{array}$$

- Ein Determinator heißt *anti-persistent* genau dann, wenn für alle A, A′ und B das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q\,x\,(A'(x), B(x))} \\
\forall \mathsf{x\,(A(x) \rightarrow A'(x))} \\
\hline
\mathsf{Q\,x\,(A(x), B(x))}
\end{array}$$

  Ob ein Determinator anti-persistent ist, kann mit dem folgenden Test festgestellt werden: Q ist anti-persistent gdw. das folgende Argument gültig ist:

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Q}\ \textit{Gebäude ist/sind vom Einsturz bedroht} \\
\hline
\mathsf{Q}\ \textit{alte(-n/-s) Gebäude ist/sind vom Einsturz bedroht}
\end{array}$$

- Die folgende Tabelle gibt einen Überblick, welche Determinatoren aufwärts- bzw. abwärtsmonoton und welche persistent bzw. anti-persistent sind.

Aufgaben

1 Lösen Sie die Aufgaben **14.30**, **14.33**, **14.34**, **14.38**, **14.39**, **14.42**, **14.43**, **14.47**, **14.48**, **14.52**!

	aufwärts-monoton	**abwärts-monoton**	**nicht monoton**	**persistent**	**anti-persistent**	**weder p. noch anti-p.**
jedes	+				+	
einige	+			+		
kein		+			+	
das	+					+
beide	+					+
viele	+					+
mehrere	+			+		
die meisten	+					+
wenige		+			+	
mindestens zwei	+			+		
höchstens zwei		+			+	
unendlich viele	+			+		
endlich viele		+			+	
Annes	+			+		
keiner von beiden		+				+
genau zwei			+			+
alle bis auf ein			+			+